УДК 517.929

Ю. Ф. Долгий, Е. В. Ульянов

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С КРАТНЫМИ ЗАПАЗДЫВАНИЯМИ*

При исследовании устойчивости систем дифференциальных уравнений с запаздываниями используются различные подходы (метод функционалов Ляпунова [1–5], метод производящих функций [6–8], W-метод Азбелева [9–11], первый метод Ляпунова [12–16]). Первый метод Ляпунова активно использует понятие характеристического уравнения. Построение характеристического уравнения, определяющего характеристические показатели или мультипликаторы периодической системы дифференциальных уравнений с кратными запаздываниями, связано с интегрируемостью нестационарной системы обыкновенных дифференциальных уравнений [17,18]. Задачу нахождения мультипликаторов можно заменить задачей нахождения собственных чисел краевой задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. На этом пути удается связать экспоненциальную устойчивость периодической системы дифференциальных уравнений с кратными запаздываниями с экспоненциальной устойчивостью систем обыкновенных дифференциальных уравнений [19]. Это сведение задачи экспоненциальной устойчивости систем с запаздываниями к аналогичной задаче для обыкновенных дифференциальных уравнений применяется при изучении абсолютной устойчивости стационарных систем с запаздываниями [20–22]. Достаточные признаки экспоненциальной устойчивости дифференциальных уравнений с последействием, полученные другими методами, приведены в [23–28]. В данной статье в рамках рассматриваемого подхода для получения достаточных условий экспоненциальной устойчивости периодической системы используется метод функций Ляпунова.

1. Метод функций Ляпунова

Рассмотрим периодическую систему дифференциальных уравнений с запаздываниями

$$\frac{dx(t)}{dt} = \sum_{k=0}^{m} A_k(t)x(t-k\omega), \tag{1.1}$$

*Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 06-01-00399, и программы фундаментальных исследований Президиума РАН № 15 «Математические методы в нелинейной динамике».

где $x\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$, $\omega>0$, A_k $(k=0,\ \ldots,\ m)$ – ω-периодические кусочно непрерывные матричные функции.

Системе (1.1) поставим в соответствие однопараметрическое семейство систем обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt}=\widetilde{A}(t,z)x, \tag{1.2}$$

где $\widetilde{A}(t,z)=\sum_{k=0}^{m} z^k A_k(t)$, $t\in\mathbb{R}$, $z\in\mathbb{C}$. Здесь $\mathbb{C}$ обозначает множество комплексных чисел. Справедлива

Теорема 1 ([19]). *Из экспоненциальной устойчивости семейства систем* (1.2) *для множества параметров* $\{z : z\in\mathbb{C},\ |z|\leqslant 1\}$ *следует экспоненциальная устойчивость системы* (1.1).

Для выполнения условий теоремы (1.1) необходимо, чтобы система

$$\frac{dx}{dt}=A(t)x \tag{1.3}$$

была экспоненциально устойчивой. Используя принцип максимума модуля [29] для собственных чисел матрицы монодромии системы (1.2), приходим к следующему достаточному условию экпоненциальной устойчивости.

Следствие 1 ([19]). *Если система* (1.3) *экспоненциально устойчива, то для экспоненциальной устойчивости системы* (1.1) *достаточно, чтобы семейство систем* (1.2) *было экспоненциально устойчивым для множества параметров* $\{z:\ z\in\mathbb{C},\ |z|=1\}$.

Теорема 1 и следствие 1 показывают, что можно получить достаточные условия экспоненциальной устойчивости системы с запаздыванием (1.1), решая аналогичную задачу для однопараметрического семейства обыкновенных дифференциальных уравнений. Для решения последней задачи используем второй метод Ляпунова. В монографии [30, с. 118] на его основе получены оценки характеристических показателей системы (1.3). Мы используем данный подход для оценки характеристических показателей однопараметрического семейства систем (1.2) в комплексной области. Рассмотрим матричную функцию G, определяемую отображением $\mathbb{R}\times\mathbb{C}\to\mathbb{C}^n$, где $\mathbb{C}^n$ – n-мерное пространство над полем комплексных чисел. Потребуем, чтобы функция $G(\cdot,z)$ допускала кусочно непрерывную производную, была ω-периодической и при всех $t\in\mathbb{R}$, $z\in\mathbb{C}$ матрицы $G(t,z)$ были эрмитовы и положительно определенными. Описанный класс матричных функций G будем обозначать как $\mathbb{G}$. Определим матричную функцию Q, полагая

$$Q(t,z)=\frac{\partial G(t,z)}{\partial t}+G(t,z)\widetilde{A}(t,z)+\widetilde{A}^*(t,z)G(t,z), \tag{1.4}$$

где $t \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{C}$. Обозначим через $q(t,z)$, $t \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{C}$, наибольший корень уравнения

$$\det(Q(t,z) - qG(t,z)) = 0,\ t \in \mathbb{R},\ z \in \mathbb{C}. \tag{1.5}$$

Справедлива

Теорема 2 ([30, с. 120]). *Пусть z – произвольное фиксированное комплексное число и $\lambda(z)$ – характеристический показатель системы* (1.2) *с максимальной вещественной частью. Для сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ в классе $\mathbb{G}$ найдется матричная функция G такая, что*

$$\frac{1}{2\omega}\int_0^\omega q(t,z)\,dt - \varepsilon \leqslant \operatorname{Re}\lambda(z) \leqslant \frac{1}{2\omega}\int_0^\omega q(t,z)\,dt.$$

Следствие 2. *Для экспоненциальной устойчивости системы* (1.1) *достаточно, чтобы в классе $\mathbb{G}$ нашлась матричная функция G такая, что выполняются неравенство*

$$\max_{|z|\leqslant 1}\frac{1}{2\omega}\int_0^\omega q(t,z)\,dt < 0$$

или неравенства

$$\frac{1}{2\omega}\int_0^\omega q(t,0)\,dt < 0, \qquad \max_{|z|=1}\frac{1}{2\omega}\int_0^\omega q(t,z)\,dt < 0.$$

Для периодических систем дифференциальных уравнений с запаздываниями второго порядка полученный результат можно конкретизировать. Выбираем матрицу-функцию

$$G(t,z) = \begin{pmatrix} a(t,z) & b(t,z) \\ \bar{b}(t,z) & c(t,z) \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},\ z \in \mathbb{C},$$

где $a(\cdot,z)$, $b(\cdot,z)$, $c(\cdot,z)$ – ω-периодические функции, допускающие кусочно непрерывные производные при всех $z \in \mathbb{C}$, причем

$$a(t,z) > 0,\ c(t,z) > 0,$$

$$a(t,z)c(t,z) - |b(t,z)|^2 > 0, \quad t \in [0,\omega],\ z \in \mathbb{C}.$$

Уравнение (1.5) можно записать в виде

$$q^2 - \operatorname{sp}(Q(t,z)G^{-1}(t,z))q + \det(Q(t,z)G^{-1}(t,z)) = 0, \quad t \in \mathbb{R},\ z \in \mathbb{C},$$

где матричная функция Q определяется формулой (1.4). Находим [30, с. 123]

$$\begin{aligned}\operatorname{sp}(Q(t,z)G^{-1}(t,z)) = \\ = \operatorname{sp}(\dot{G}(t,z)G^{-1}(t,z) + G(t,z)\widetilde{A}(t,z)G^{-1}(t,z) + \widetilde{A}^{*}(t,z)) = \\ = \operatorname{sp}(\dot{G}(t,z)G^{-1}(t,z)) + 2\operatorname{Re}(\operatorname{sp}\widetilde{A}(t,z)), \quad t\in\mathbb{R},\ z\in\mathbb{C}.\end{aligned}$$

Здесь $\operatorname{sp}(\dot{G}(t,z)G^{-1}(t,z)) = 2\dot{\delta}(t,z)$,

$$e^{2\delta(t,z)} = \det\ G(t,z) = a(t,z)c(t,z) - |b(t,z)|^2, \quad t\in\mathbb{R},\ z\in\mathbb{C}.$$

Таким образом, уравнение (1.5) принимает вид

$$q^2 - 2\big(\dot{\delta}(t,z) + \operatorname{Re}(\operatorname{sp}\widetilde{A}(t,z))\big)q + e^{-2\delta(t,z)}\Delta(t,z) = 0,$$

где $\Delta(t,z) = \det\ Q(t,z),\ t\in\mathbb{R},\ z\in\mathbb{C}$. Находим его наибольший корень

$$\begin{aligned}q(t,z) = \dot{\delta}(t,z) + \operatorname{Re}(\operatorname{sp}\widetilde{A}(t,z)) + \\ + \sqrt{\big(\dot{\delta}(t,z) + \operatorname{Re}(\operatorname{sp}\widetilde{A}(t,z))\big)^2 - e^{-2\delta(t,z)}\Delta(t,z)}, \quad t\in\mathbb{R},\ z\in\mathbb{C}.\end{aligned} \tag{1.6}$$

2. Дифференциальные уравнения второго порядка

Используем полученный в разделе 1 результат для нахождения достаточных условий экспоненциальной устойчивости линейного периодического дифференциального уравнения второго порядка с запаздываниями:

$$\ddot{x}(t) + \sum_{k=0}^{m}\left(P_k(t)\dot{x}(t-k\omega) + Q_k(t)x(t-k\omega)\right) = 0, \tag{2.1}$$

где $x\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $\dot{P}_k$ и Q_k $(k=0,\ldots,m)$ – кусочно непрерывные ω-периодические функции. Рассмотрим линейное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\ddot{x}(t) + P(t,z)\dot{x}(t) + Q(t,z)x(t) = 0, \tag{2.2}$$

где $P(t,z) = \sum_{k=0}^{m} z^k P_k(t)$; $Q(t,z) = \sum_{k=0}^{m} z^k Q_k(t)$; $t\in\mathbb{R}$, $z\in\mathbb{C}$. Замена переменной

$$x = y\exp\left[-\frac{1}{2}\int_0^t P(t_1,z)\,dt_1\right] \tag{2.3}$$

приводит уравнение (2.2) к уравнению Хилла

$$\ddot{y} + p(t,z)y = 0 \tag{2.4}$$

с коэффициентом

$$p(t,z) = Q(t,z) - \frac{1}{4}P^2(t,z) - \frac{1}{2}\dot{P}(t,z), \quad t \in \mathbb{R},\ z \in \mathbb{C}.$$

Находим $p(t,z) = \sum_{k=0}^{2m} p_k(t)z^k,\ t \in \mathbb{R},\ z \in \mathbb{C}$, где p_k $(k = 0,\dots,2m)$ – ω-периодические кусочно непрерывные функции, определяемые следующим образом:

$$\begin{aligned} p_k(t) &= Q_k(t) - \frac{1}{4}\sum_{i=0}^{k} P_i(t)P_{k-i}(t) - \frac{1}{2}\dot{P}_k(t), \quad k = \overline{0,m}; \\ p_k(t) &= -\frac{1}{4}\sum_{i=k-m}^{m} P_i(t)P_{k-i}(t), \quad k = \overline{m+1,2m},\ t \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Теорема 3. *Для экспоненциальной устойчивости уравнения* (2.1) *достаточно, чтобы выполнялось одно из следующих условий:*

$$1) \quad \frac{1}{2\sqrt{p_{0max}}}(p_{0max} - p_{0cp}) + \frac{1}{2\omega\sqrt{p_{0max}}}\sum_{k=1}^{2m}\int_0^\omega |p_k(t)|\,dt < \\ < \frac{1}{2\omega}\int_0^\omega \left(P_0(t) - \sum_{k=1}^{m}|P_k(t)|\right)dt \quad \textit{при} \quad p_{0max} + p_{0cp} > 0; \tag{2.6}$$

$$2) \quad \sqrt{-p_{0cp}} + \frac{1}{2\omega\sqrt{-p_{0cp}}}\sum_{k=1}^{2m}\int_0^\omega |p_k(t)|\,dt < \\ < \frac{1}{2\omega}\int_0^\omega \left(P_0(t) - \sum_{k=1}^{m}|P_k(t)|\right)dt \quad \textit{при} \quad p_{0max} + p_{0cp} \leqslant 0; \tag{2.7}$$

$$3) \quad \frac{1}{2\omega}\ln\frac{p_0(t_1^+)...p_0(t_n^+)}{p_0(t_1^-)...p_0(t_n^-)} + \frac{1}{2\omega}\sum_{k=1}^{2m}\int_0^\omega \frac{|p_k(t)|}{\sqrt{p_0(t)}}\,dt < \\ < \frac{1}{2\omega}\int_0^\omega \left(P_0(t) - \sum_{k=1}^{m}|P_k(t)|\right)dt \quad \textit{при}\ p_0(t) > 0,\ t \in \mathbb{R}, \\ \textit{и } p_0 \textit{ кусочно непрерывно дифференцируема.} \tag{2.8}$$

Здесь

$$p_{0cp} = \frac{1}{\omega}\int_0^\omega p_0(t)\,dt, \quad p_{0max} = \max_{t\in[0,\omega]} p_0(t),$$

$t_1^+,\dots,t_n^+$ *– точки максимумов, а* $t_1^-,\dots,t_n^-$ *– точки минимумов функции* p_0 *на промежутке* $[0,\omega)$.

Доказательство. Обозначим

$$\frac{1}{\omega}\int_0^{\omega} P(t,z)\,dt = 2\mu_0(z), \quad z \in \mathbb{C}. \tag{2.9}$$

Тогда характеристические показатели $\lambda(z)$, $\Lambda(z)$ уравнений (2.2) и (2.4) с максимальными вещественными частями связаны равенством $\lambda(z) = \Lambda(z) - \mu_0(z)$, $z \in \mathbb{C}$. Отсюда следует, что оценка максимального характеристического показателя для уравнения (2.2) сводится к оценке соответствующего показателя для уравнения Хилла (2.4).

Уравнению (2.4) можно поставить в соответствие линейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка (1.2) со следующей матрицей коэффициентов:

$$\widetilde{A}(t,z) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -p(t,z) & 0 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},\ z \in \mathbb{C}.$$

Возьмем матрицу

$$G(t) = \begin{pmatrix} c(t) & 0 \\ 0 & c^{-1}(t) \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},$$

где $c(\cdot)$ – ω-периодическая положительная функция с кусочно непрерывной производной. Используя формулу (1.4), находим

$$Q(t,z) = \begin{pmatrix} \dot{c}(t) & c(t) - \overline{p(t,z)}c^{-1}(t) \\ c(t) - p(t,z)c^{-1}(t) & -c^{-2}(t)\dot{c}(t) \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},\ z \in \mathbb{C}.$$

Для рассматриваемой системы имеем

$$\delta(t,z) \equiv 0,$$

$$\Delta(t,z) = -\frac{\dot{c}^2(t)}{c^2(t)} - \left| c(t) - \frac{p(t,z)}{c(t)} \right|^2, \quad t \in \mathbb{R},\ z \in \mathbb{C}.$$

Используя эти результаты и формулу (1.6), находим

$$q(t,z) = \sqrt{\left(\frac{\dot{c}(t)}{c(t)}\right)^2 + \left| c(t) - \frac{p(t,z)}{c(t)} \right|^2}, \quad t \in \mathbb{R},\ z \in \mathbb{C}. \tag{2.10}$$

В частности, если $c(t) = c = \mathrm{const} > 0$, $t \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{C}$, то

$$q(t,z) = \left| c - \frac{p(t,z)}{c} \right|, \quad t \in \mathbb{R},\ z \in \mathbb{C}. \tag{2.11}$$

Исходя из следствия 2, заключаем, что для экспоненциальной устойчивости исходного уравнения (2.1) достаточно, чтобы выполнялись следующие неравенства:

$$\max_{|z|=1}\left(\frac{1}{2\omega}\int_0^\omega q(t,z)\,dt - \operatorname{Re}\mu_0(z)\right) < 0, \tag{2.12}$$

$$\frac{1}{2\omega}\int_0^\omega q(t,0)\,dt - \mu_0(0) < 0. \tag{2.13}$$

Используя формулы (2.9) и (2.11), неравенство (2.12) заменим более жестким неравенством

$$\frac{1}{2\omega c}\int_0^\omega \Big(|p_0(t)-c^2| + \sum_{k=1}^{2m}|p_k(t)|\Big)dt < \frac{1}{2\omega}\int_0^\omega \Big(P_0(t) - \sum_{k=1}^{m}|P_k(t)|\Big)dt. \tag{2.14}$$

Используя неравенство (2.14), покажем справедливость неравенств (2.6), (2.7).

Если $p_0(t)\equiv p_0 = \mathrm{const}$, то положим в (2.14) $c=\sqrt{|p_0|}$. Тогда неравенства (2.6) и (2.7) выполняются.

Если $p_0(t)\neq \mathrm{const}$, то $p_{0max} > p_{0cp}$. Следовательно, $p_{0max} > 0$ при $p_{0max}+p_{0cp} > 0$ и $p_{0cp} < 0$ при $p_{0max}+p_{0cp}\leqslant 0$. Поэтому можно взять

$$c = \begin{cases}\sqrt{p_{0max}} & \text{при} \quad p_{0max}+p_{0cp} > 0,\\ \sqrt{-p_{0cp}} & \text{при} \quad p_{0max}+p_{0cp}\leqslant 0.\end{cases}$$

Если $p_{0max}+p_{0cp} > 0$, то имеем

$$\frac{1}{2\omega c}\int_0^\omega \Big(|p_0(t)-c^2| + \sum_{k=1}^{2m}|p_k(t)|\Big)dt =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{p_{0max}}}(p_{0max}-p_{0cp}) + \frac{1}{2\omega\sqrt{p_{0max}}}\int_0^\omega \sum_{k=1}^{2m}|p_k(t)|\,dt.$$

Неравенство (2.14) принимает вид неравенства (2.6). Если $p_{0max}+p_{0cp}\leqslant 0$, то имеем

$$\frac{1}{2\omega c}\int_0^\omega \Big(|p_0(t)-c^2| + \sum_{k=1}^{2m}|p_k(t)|\Big)dt = \sqrt{-p_{0cp}} + \frac{1}{2\omega\sqrt{-p_{0cp}}}\int_0^\omega \sum_{k=1}^{2m}|p_k(t)|\,dt.$$

Неравенство (2.14) принимает вид неравенства (2.7). Нетрудно убедиться, что при выполнении неравенства (2.6) или (2.7) неравенство (2.13) выполняется.

Покажем справедливость неравенства (2.8). Принимая в формуле (2.10) $c(t) = \sqrt{p_0(t)}$, $t \in \mathbb{R}$, получим

$$\max_{|z|=1}\left(\frac{1}{2\omega}\int_0^\omega q(t,z)\,dt - \operatorname{Re}\mu_0(z)\right) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2\omega}\left(\int_0^\omega \frac{|\dot{p}_0(t)|}{2p_0(t)}\,dt + \sum_{k=1}^{2m}\int_0^\omega \frac{|p_k(t)|}{\sqrt{p_0(t)}}\,dt - \int_0^\omega \Big(P_0(t) - \sum_{k=1}^{m}|P_k(t)|\Big)dt\right).$$

Так как p_0 имеет конечное число максимумов и минимумов на периоде, то имеем

$$\frac{1}{2\omega}\int_0^\omega \frac{|\dot{p}_0(t)|}{2p_0(t)}\,dt = \frac{1}{2\omega}\ln\frac{p_0(t_1^+)\dots p_0(t_n^+)}{p_0(t_1^-)\dots p_0(t_n^-)}.$$

Тогда последнее неравенство совпадает с (2.8). Нетрудно убедиться, что при выполнении неравенства (2.8) неравенство (2.13) выполняется.

Пример. Рассмотрим линейное периодическое дифференциальное уравнение (2.1) второго порядка с запаздыванием

$$\nu^2\ddot{x}(t) + 2\xi\nu\dot{x}(t) + x(t) = \mu v(t)(x(t-2\pi) - x(t)), \tag{2.15}$$

где ν, ξ, μ – положительные параметры, функция v определяется формулой $v(t) = 1 - \varepsilon\cos(t)$, $t \in \mathbb{R}$, $0 < \varepsilon < 1$.

Уравнение (2.15) можно записать в форме (2.1) с коэффициентами

$$P_0(t) = \frac{2\xi}{\nu}, \quad P_1(t) = 0, \quad Q_0(t) = \frac{1+\mu v(t)}{\nu^2}, \quad Q_1(t) = -\frac{\mu v(t)}{\nu^2}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Используя формулы (2.5), находим

$$p_0(t) = \frac{1-\xi^2+\mu v(t)}{\nu^2}, \quad p_1(t) = -\frac{\mu v(t)}{\nu^2}, \quad p_2(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

а) Если выполняется условие $p_{0max} + p_{0cp} = \dfrac{2+(2+\varepsilon)\mu-2\xi^2}{\nu^2} > 0$, то для экспоненциальной устойчивости уравнения (2.15) достаточно выполнения неравенства (2.6) ($m = 1$). После вычислений оно принимает вид

$$\frac{(1+\varepsilon)\mu}{2\nu\sqrt{1+\mu+\varepsilon\mu-\xi^2}} < \frac{\xi}{\nu}$$

и преобразуется к форме $(1+\varepsilon)\mu < 4\xi$.

В результате область экспоненциальной устойчивости уравнения (2.15) описывается неравенствами

$$\mu < \frac{4\xi}{1+\varepsilon} \quad \text{при} \quad 0 < \xi \leqslant 1,$$

$$\frac{2(\xi^2-1)}{2+\varepsilon} < \mu < \frac{4\xi}{1+\varepsilon} \quad \text{при} \quad 1 < \xi < \frac{2+\varepsilon+\sqrt{(2+\varepsilon)^2+(1+\varepsilon)^2}}{1+\varepsilon}.$$

б) Если $p_{0max} + p_{0cp} = \dfrac{2+(2+\varepsilon)\mu - 2\xi^2}{\nu^2} \leqslant 0$, то для экспоненциальной устойчивости уравнения (2.15) достаточно выполнения неравенства (2.7) $(m = 1)$. После вычислений оно принимает вид

$$\frac{2\xi^2-\mu-2}{2\nu\sqrt{\xi^2-\mu-1}} < \frac{\xi}{\nu}$$

и преобразуется к форме $\mu < 2(\xi - 1)$.

В результате область экспоненциальной устойчивости уравнения (2.15) описывается неравенствами

$$\mu \leqslant \frac{2(\xi^2-1)}{2+\varepsilon} \quad \text{при} \quad 1 < \xi < 1+\varepsilon,$$

$$\mu < 2(\xi-1) \quad \text{при} \quad \xi \geqslant 1+\varepsilon.$$

в) Если выполняется условие $p_0(t) > 0$, $t \in [0, 2\pi)$, что равносильно неравенству $1-\xi^2+\mu(1-\varepsilon) > 0$, то для экспоненциальной устойчивости уравнения (2.15) достаточно выполнения неравенства (2.8) $(n = 1,\ t_1^- = 0,\ t_1^+ = \pi)$. Используя [32, с. 197], имеем

$$\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} \frac{|p_1(t)|\,dt}{\sqrt{p_0(t)}} = \frac{1}{\pi\nu}\left[\sqrt{1-\xi^2+\mu+\mu\varepsilon}\,E\left(\frac{\pi}{2},k\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{1-\xi^2}{\sqrt{1-\xi^2+\mu+\mu\varepsilon}}F\left(\frac{\pi}{2},k\right)\right].$$

Здесь $F(\varphi,k)$, $E(\varphi,k)$ – нормальные эллиптические интегралы Лежандра первого и второго рода соответственно, $k=\sqrt{\dfrac{2\mu\varepsilon}{1-\xi^2+\mu+\mu\varepsilon}}$.

В результате область экспоненциальной устойчивости уравнения (2.15) описывается неравенствами

$$\frac{1}{4\pi}\ln\frac{1-\xi^2+\mu(1+\varepsilon)}{1-\xi^2+\mu(1-\varepsilon)}+\frac{1}{\pi\nu}\left[\sqrt{1-\xi^2+\mu+\mu\varepsilon}\;E\left(\frac{\pi}{2},k\right)-\right.$$
$$\left.-\frac{1-\xi^2}{\sqrt{1-\xi^2+\mu+\mu\varepsilon}}\;F\left(\frac{\pi}{2},k\right)\right]<\frac{\xi}{\nu},$$
$$1-\xi^2+\mu(1-\varepsilon)>0.$$

В пределе при $\varepsilon\to 0$ область экспоненциальной устойчивости уравнения (2.15) описывается неравенствами

$$0<\mu<2\xi(1+\xi)\quad\text{при}\quad 0<\xi\leqslant 1,$$
$$2\xi(\xi-1)<\mu<2\xi(1+\xi)\quad\text{при}\quad \xi>1.$$

3. Система дифференциальных уравнений второго порядка

Рассмотрим периодическую систему дифференциальных уравнений второго порядка с запаздыванием

$$\frac{d^2u(t)}{dt^2}+\nu_0\frac{du(t)}{dt}+\sum_{k=0}^{m}B_k(t)u(t-k\omega)=0, \tag{3.1}$$

где $u\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$, $\omega>0$, B_k $(k=0,\ldots,m)$ – ω-периодические кусочно непрерывные матричные функции; ν_0 – положительное число.

Запишем для (3.1) соответствующую однопараметрическую периодическую систему обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка

$$\frac{d^2u}{dt^2}+\nu_0\frac{du}{dt}+\sum_{k=0}^{m}z^kB_k(t)u=0. \tag{3.2}$$

Замена переменной $u=\exp(-\nu_0t/2)v$ приводит систему уравнений (3.2) к виду

$$\frac{d^2v}{dt^2}+P(t,z)v=0, \tag{3.3}$$

где P – ω-периодическая кусочно непрерывная матричная функция первого аргумента, определяемая формулой

$$
\begin{gathered}
P(t,z) = P_0(t) + \widetilde{P}(t,z), \quad P_0(t) = B_0(t) - \frac{1}{4}\nu_0^2 I_n, \\
\widetilde{P}(t,z) = \sum_{k=1}^{m} B_k(t) z^k, \quad t \in \mathbb{R},\ z \in \mathbb{C}.
\end{gathered} \tag{3.4}
$$

Теорема 4. а) *Пусть C – произвольная ω-периодическая кусочно непрерывная матричная функция; $C(t)$, $t \in \mathbb{R}$, – положительно определенные эрмитовы матрицы. Тогда для экспоненциальной устойчивости системы* (3.1) *достаточно, чтобы выполнялось следующее условие:*

$$
\frac{1}{\omega}\left(\int_0^\omega q_0(t)\,dt + \sum_{k=1}^{m}\int_0^\omega \left|C(t)^{-\frac{1}{2}} B_k(t) C(t)^{-\frac{1}{2}}\right| dt\right) < \nu_0, \tag{3.5}
$$

где $q_0(t)$ – норма матрицы

$$
Q_0(t) = \begin{pmatrix} C(t)^{-\frac{1}{2}}\dot{C}(t)C(t)^{-\frac{1}{2}} & C(t) - C(t)^{-\frac{1}{2}}P_0^*(t)C(t)^{-\frac{1}{2}} \\ C(t) - C(t)^{-\frac{1}{2}}P_0(t)C(t)^{-\frac{1}{2}} & -C(t)^{-\frac{1}{2}}\dot{C}(t)C(t)^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix}. \tag{3.6}
$$

В частном случае постоянной матрицы C неравенство (3.5) *принимает вид*

$$
\frac{1}{\omega}\left(\int_0^\omega \left|C - C^{-\frac{1}{2}}\Big(B_0(t) - \frac{1}{4}\nu_0^2 I_n\Big)C^{-\frac{1}{2}}\right| dt + \sum_{k=1}^{m}\int_0^\omega \left|C^{-\frac{1}{2}} B_k(t) C^{-\frac{1}{2}}\right| dt\right) < \nu_0. \tag{3.7}
$$

б) *Пусть $B_0(t)$, $t \in \mathbb{R}$, – эрмитовы матрицы и $\beta_{0min}(t)$, $t \in \mathbb{R}$, – их наименьшие собственные значения; $B_k(t)$ $(k = 1, \ldots, m)$, $t \in \mathbb{R}$, – положительно определенные эрмитовы матрицы и $\beta_{kmax}(t)$ $(k = 1, \ldots, m)$, $t \in \mathbb{R}$, – их наибольшие собственные значения. Предположим, что*

$$
B_0(t) \leqslant \alpha^2 I_n,\ t \in \mathbb{R},
$$

где $\alpha > 0$ – некоторое число. Тогда для экспоненциальной устойчивости системы (3.1) *достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$
\alpha - \frac{1}{\alpha\omega}\left(\int_0^\omega \Big(\beta_{0min}(t) - \frac{1}{4}\nu_0^2\Big)dt + + \sum_{k=1}^{m}\int_0^\omega \beta_{kmax}(t)\,dt\right) < \nu_0. \tag{3.8}
$$

в) *Пусть $B_0(t)$, $t \in \mathbb{R}$, – эрмитовы матрицы и $\beta_{0max}(t)$, $t \in \mathbb{R}$, – их наибольшие собственные значения; $B_k(t)$ $(k = 1, \ldots, m)$, $t \in \mathbb{R}$, – положительно* *определенные эрмитовы матрицы. Тогда для экспоненциальной устойчивости системы* (3.1) *достаточно, чтобы выполнялось одно из следующих условий:*

1) $$\frac{\beta_0 - \beta_{0cp}^-}{\sqrt{\beta_0}} + \frac{1}{\sqrt{\beta_0}}\left(\frac{1}{4}\nu_0^2 + \sum_{k=1}^{m}\beta_{kcp}^+\right) < \nu_0$$

$$\text{при } \beta_0 + \beta_{0cp}^+ > 0; \tag{3.9}$$

2) $$\frac{-\beta_{0cp}^+ - \beta_{0cp}^-}{\sqrt{-\beta_{0cp}^+}} + \frac{1}{\sqrt{-\beta_{0cp}^+}}\left(\frac{1}{4}\nu_0^2 + \sum_{k=1}^{m}\beta_{kcp}^+\right) < \nu_0$$

$$\text{при } \beta_0 + \beta_{0cp}^+ \leqslant 0; \tag{3.10}$$

3) $$\frac{\beta_0 - \beta_{0cp}^-}{\sqrt{\beta_0}} + \frac{1}{\sqrt{\beta_0}}\left(\frac{1}{4}\nu_0^2 + \sum_{k=1}^{m}\beta_{kcp}^+\right) < \nu_0$$

$$\text{при } \beta_0 + \beta_{0cp}^- > 0; \tag{3.11}$$

4) $$\sqrt{-\beta_{0cp}^-} + \frac{1}{\sqrt{-\beta_{0cp}^-}}\left(\frac{1}{4}\nu_0^2 + \sum_{k=1}^{m}\beta_{kcp}^+\right) \leqslant \nu_0$$

$$\text{при } \beta_0 + \beta_{0cp}^- < 0. \tag{3.12}$$

Здесь

$$\beta_0 = \max_{0\leqslant t\leqslant\omega}\beta_{0max}(t); \qquad \beta_{0cp}^+ = \frac{1}{\omega}\int_0^{\omega}\beta_{0max}(t)\,dt;$$

$$\beta_{0cp}^- = \frac{1}{\omega}\int_0^{\omega}\beta_{0min}(t)\,dt; \quad \beta_{kcp}^+ = \frac{1}{\omega}\int_0^{\omega}\beta_{kmax}(t)\,dt, \quad (k = 1,\ldots,m).$$

г) *Пусть* $B_0(t)$, $t \in \mathbb{R}$ *– эрмитовы матрицы,* $P_0(t) > 0$, $t \in \mathbb{R}$, *и существует кусочно непрерывная производная* $\dot{B}_0$. *Тогда для экспоненциальной устойчивости системы* (3.1) *достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$\frac{1}{\omega}\int_0^{\omega}\sqrt{\left|P_0(t)^{-\frac{1}{2}}\right|\sum_{k=1}^{n}\left|B_k(t)\right| + \left|P_0(t)^{-\frac{1}{2}}\dot{B}_0(t)P_0(t)^{-\frac{1}{2}}\right|}\,dt < \nu_0. \tag{3.13}$$

Доказательство. Характеристические показатели $\Lambda(z)$, $\lambda(z)$ систем (3.2) и (3.3) и максимальные вещественные части связаны следующим равенством: $\Lambda(z) = \lambda(z) - \nu_0/2$. Отсюда заключаем, что оценка максимального характеристического показателя для системы (3.2) сводится к оценке соответствующего показателя для системы (3.3). Запишем (3.3) в виде системы (1.2), где

$$x = \begin{pmatrix} v \\ \dot{v} \end{pmatrix}, \quad \widetilde{A}(t,z) = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -P(t,z) & 0 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},\ z \in \mathbb{C}.$$

Пусть C – произвольная $n \times n$ матрица-функция, обладающая кусочно непрерывной производной, для которой матрицы $C(t)$, $t \in \mathbb{R}$, являются эрмитовыми и положительно определенными. Применим теорему 2, полагая

$$G(t) = \begin{pmatrix} C(t) & 0 \\ 0 & C(t)^{-1} \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Воспользовавшись формулой (1.4), определим вид матричной функции Q. Имеем

$$Q(t,z) = \begin{pmatrix} \dot{C}(t) & C(t) - P(t,z)^* C(t)^{-1} \\ C(t) - C(t)^{-1} P(t,z) & -C(t)^{-1}\dot{C}(t)C(t)^{-1} \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},\ z \in \mathbb{C}.$$

Уравнение (1.5) преобразуется к виду $\det(\widetilde{Q}(t,z) - q(t,z)I_{2n}) = 0$, где $\widetilde{Q}(t,z) = G(t,z)^{-\frac{1}{2}} Q(t,z) G(t,z)^{-\frac{1}{2}}$, $t \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{C}$. Определим вид матричной функции $\widetilde{Q}$. Имеем

$$\widetilde{Q}(t,z) = \begin{pmatrix} C(t)^{-\frac{1}{2}}\dot{C}(t)C(t)^{-\frac{1}{2}} & C(t) - C(t)^{-\frac{1}{2}}P(t,z)^*C(t)^{-\frac{1}{2}} \\ C(t) - C(t)^{-\frac{1}{2}}P(t,z)C(t)^{-\frac{1}{2}} & -C(t)^{-\frac{1}{2}}\dot{C}(t)C(t)^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix},$$

где $t \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{C}$. Для наибольшего корня уравнения (1.5) $q_2(t,z)$ при фиксированных z справедливо неравенство

$$q_2(t,z) \leqslant q(t,z), \tag{3.14}$$

где $q(t,z)$ – норма матрицы $\widetilde{Q}(t,z)$, $t \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{C}$. Действительно, для соответствующего собственного вектора $\widetilde{x}$ матрицы $\widetilde{Q}(t,z)$, $t \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{C}$, имеем

$$\widetilde{Q}(t,z)\widetilde{x} = q_2(t,z)\widetilde{x},$$

$$q(t,z) = |\widetilde{Q}(t,z)| = \sup_{x \neq 0} \frac{|\widetilde{Q}(t,z)x|}{|x|} \geqslant \frac{|\widetilde{Q}(t,z)\widetilde{x}|}{|\widetilde{x}|} = |q_2(t,z)| \geqslant q_2(t,z).$$

Из неравенства теоремы 2 для характеристического показателя $\lambda(z)$ уравнения (3.3) и оценки (3.14) следует

$$\mathrm{Re}\ \lambda(z) \leqslant \frac{1}{2\omega}\int_0^\omega q(t,z)\,dt, \quad t\in\mathbb{R},\ z\in\mathbb{C}.$$

Следовательно, исходя из этой оценки характеристического показателя $\lambda(z)$ достаточное условие экспоненциальной устойчивости системы (3.1) примет вид

$$\max_{|z|\leqslant 1}\left(\frac{1}{\omega}\int_0^\omega q(t,z)\,dt\right) < \nu_0. \tag{3.15}$$

Пусть выполнены условия «а» теоремы. Запишем матрицу $\widetilde{Q}(t,z)$ в виде $\widetilde{Q}(t,z) = \widetilde{Q}_0(t) + \widetilde{Q}_1(t,z)$, где матрица $\widetilde{Q}_0(t)$ имеет вид (3.6), а матрица

$$\widetilde{Q}_1(t,z) = \begin{pmatrix} 0 & \widetilde{Q}^*_{21}(t,z) \\ \widetilde{Q}_{21}(t,z) & 0 \end{pmatrix},$$

где $\widetilde{Q}_{21}(t,z) = -C(t)^{-\frac{1}{2}}\widetilde{P}(t,z)C(t)^{-\frac{1}{2}}$, $\widetilde{P}(t,z) = \sum\limits_{k=1}^{n} B_k(t)z^k$, $\quad t\in\mathbb{R},\ z\in\mathbb{C}$.

Введем обозначения

$$R_{2k}(t) = C(t)^{-\frac{1}{2}}B_k(t)C(t)^{-\frac{1}{2}} \quad (k=1,\ldots,m), \quad t\in\mathbb{R}. \tag{3.16}$$

Тогда матрица $\widetilde{Q}(t,z)$ примет вид

$$\widetilde{Q}(t,z) = \widetilde{Q}_0(t) + \sum_{k=1}^{m}\begin{pmatrix} 0 & -\overline{z}^{\,k}R^*_{2k}(t) \\ -z^{\,k}R_{2k}(t) & 0 \end{pmatrix},$$

где $t\in\mathbb{R},\ z\in\mathbb{C}$. Положим

$$\widetilde{Q}_{2k}(t,z) = \begin{pmatrix} 0 & -\overline{z}^{\,k}R^*_{2k}(t) \\ -z^{\,k}R_{2k}(t) & 0 \end{pmatrix} \ (k=1,\ \ldots,\ m), \quad t\in\mathbb{R},\ z\in\mathbb{C}.$$

Для нормы матрицы $\widetilde{Q}(t,z)$ справедливо неравенство

$$\big|\widetilde{Q}(t,z)\big| = \Big|\widetilde{Q}_0(t) + \sum_{k=1}^{m}\widetilde{Q}_{2k}(t,z)\Big| \leqslant \big|\widetilde{Q}_0(t)\big| + \sum_{k=1}^{m}\big|\widetilde{Q}_{2k}(t,z)\big|. \tag{3.17}$$

Имея в виду равенство спектральных норм $|R^*_{2k}(t)|=|R_{2k}(t)|$, $t\in\mathbb{R}$, [31, с. 373], получим

$$\big|\widetilde{Q}_{2k}(t,z)\big| = \sup_{x,y\neq 0}\frac{\sqrt{|\overline{z}^{\,k}R^*_{2k}(t)y|^2 + |z^{\,k}R_{2k}(t)x|^2}}{\sqrt{|y|^2+|x|^2}} = |z|^k|R_{2k}(t)|,\ t\in\mathbb{R},\ z\in\mathbb{C}.$$

С учетом последних формул неравенство (3.17) примет следующий вид:

$$\bigl|\widetilde{Q}(t,z)\bigr| \leqslant q_0(t) + \sum_{k=1}^{m} |z|^k |R_{2k}(t)|, \quad t \in \mathbb{R},\ z \in \mathbb{C}.$$

Учитывая последнее неравенство, оценим величину

$$\max_{|z|\leqslant 1}\left(\frac{1}{\omega}\int_0^\omega q(t,z)\,dt\right) = \frac{1}{\omega}\max_{|z|\leqslant 1}\left(\int_0^\omega |\widetilde{Q}(t,z)|\,dt\right) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{\omega}\left(\int_0^\omega q_0(t)\,dt + \sum_{k=1}^{m}\int_0^\omega |R_{2k}(t)|\,dt\right).$$

Тогда неравенство (3.15) примет вид

$$\frac{1}{\omega}\left(\int_0^\omega q_0(t)\,dt + \sum_{k=1}^{m}\int_0^\omega |R_{2k}(t)|\,dt\right) < \nu_0$$

или с учетом введенных обозначений (3.16) получим (3.5).

Рассмотрим частный случай $C(t) = C = \mathrm{const}$, $t \in \mathbb{R}$. Воспользовавшись формулой (3.6), имеем

$$Q_0(t) = \begin{pmatrix} 0 & C - C^{-\frac{1}{2}}P_0^*(t)C^{-\frac{1}{2}} \\ C - C^{-\frac{1}{2}}P_0(t)C^{-\frac{1}{2}} & 0 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Введем обозначение

$$R_1(t) = C - C^{-\frac{1}{2}}P_0(t)C^{-\frac{1}{2}}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{3.18}$$

Тогда матрица $\widetilde{Q}_0(t)$, $t \in \mathbb{R}$, примет вид

$$\widetilde{Q}_0(t) = \begin{pmatrix} 0 & R_1^*(t) \\ R_1(t) & 0 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Для нормы матрицы $\widetilde{Q}_0(t)$, $t \in \mathbb{R}$, с учетом равенства спектральных норм $|R_1^*(t)| = |R_1(t)|$, $t \in \mathbb{R}$, [31, с. 373] справедливо равенство

$$\bigl|\widetilde{Q}_0(t)\bigr| = \sup_{x,y\neq 0}\frac{\sqrt{|R_1^*(t)y|^2 + |R_1(t)x|^2}}{\sqrt{|y|^2+|x|^2}} = |R_1(t)|.$$

Учитывая его и обозначение (3.18), из неравенства (3.5) получим (3.7).

Пусть выполнены условия «б» теоремы. Положим в (3.7) $C = \alpha I_n$. Так как $B_0(t) \leqslant \alpha^2 I_n$, $t \in \mathbb{R}$, то $R_1(t)$, $t \in \mathbb{R}$, – положительно определенная эрмитова матрица. Имеем

$$|R_1(t)| = \frac{1}{\alpha}\left(\alpha^2 - \beta_{0min}(t) + \frac{1}{4}\nu_0^2\right),$$

$$|R_{2k}(t)| = \frac{1}{\alpha}\beta_{kmax}(t)\ (k = 1, \ldots, m), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Тогда неравенство (3.7) примет вид (4).

Пусть выполнены условия «в» теоремы. Положим в (3.7)

$$C = \begin{cases} \sqrt{\beta_0}\, I_n & \text{при} \quad \beta_0 + \beta_{0cp}^+ > 0, \\ \sqrt{-\beta_{0cp}^+}\, I_n & \text{при} \quad \beta_0 + \beta_{0cp}^+ \leqslant 0. \end{cases}$$

Тогда, если $\beta_0 + \beta_{0cp}^+ > 0$, то имеем

$$|R_1(t)| = \frac{1}{\sqrt{\beta_0}}\left(\beta_0 - \beta_{0min}(t) + \frac{1}{4}\nu_0^2\right),$$
$$|R_{2k}(t)| = \frac{1}{\sqrt{\beta_0}}\beta_{kmax}(t) \quad (k = 1, \ldots, m),$$

где $t \in \mathbb{R}$. Следовательно, условие (3.7) принимает вид неравенства (3.9). Аналогично, если $\beta_0 + \beta_{0cp}^+ \leqslant 0$, то имеем

$$|R_1(t)| = \frac{1}{\sqrt{-\beta_{0cp}^+}}\left(-\beta_{0cp}^+ - \beta_{0min}(t) + \frac{1}{4}\nu_0^2\right),$$
$$|R_{2k}(t)| = \frac{1}{\sqrt{-\beta_{0cp}^+}}\beta_{kmax}(t) \quad (k = 1, \ldots, m), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Следовательно, условие (3.7) примет вид неравенства (3.10).

Теперь при выполнении условия «в» теоремы положим в (3.7)

$$C = \begin{cases} \sqrt{\beta_0}\, I_n & \text{при} \quad \beta_0 + \beta_{0cp}^- > 0, \\ \sqrt{-\beta_{0cp}^-}\, I_n & \text{при} \quad \beta_0 + \beta_{0cp}^- \leqslant 0. \end{cases}$$

Тогда, если $\beta_0 + \beta_{0cp}^- > 0$, то имеем

$$|R_1(t)| = \frac{1}{\sqrt{\beta_0}}\left(\beta_0 - \beta_{0min}(t) + \frac{1}{4}\nu_0^2\right),$$
$$|R_{2k}(t)| = \frac{1}{\sqrt{\beta_0}}\beta_{kmax}(t) \quad (k = 1, \ldots, m),$$

где $t \in \mathbb{R}$. Следовательно, условие (3.7) примет вид неравенства (3.11). Аналогично, если $\beta_0 + \beta_{0cp}^- \leqslant 0$, то имеем

$$|R_1(t)| = \frac{1}{\sqrt{-\beta_{0cp}^-}}\left(-\beta_{0cp}^- - \beta_{0min}(t) + \frac{1}{4}\nu_0^2\right),$$
$$|R_{2k}(t)| = \frac{1}{\sqrt{-\beta_{0cp}^-}}\beta_{kmax}(t) \ (k = 1, \ldots, m),$$

где $t \in \mathbb{R}$. Следовательно, условие (3.7) примет вид неравенства (3.12).

Пусть выполнены условия «г» теоремы. Применим теорему 2, полагая

$$G(t) = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & P_0(t)^{-1} \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Воспользовавшись формулой (1.4), находим

$$Q(t,z) = \begin{pmatrix} 0 & -\widetilde{P}(t,z)^* P_0(t)^{-1} \\ -P_0(t)^{-1}\widetilde{P}(t,z) & -P_0(t)^{-1}\dot{P}_0(t)P_0(t)^{-1} \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}, \ z \in \mathbb{C}.$$

Аналогично, как в доказательстве пункта «а», определим вид матричной функции

$$\widetilde{Q}(t,z) = \begin{pmatrix} 0 & -\widetilde{P}(t,z)^* P_0(t)^{-\frac{1}{2}} \\ -P_0(t)^{-\frac{1}{2}}\widetilde{P}(t,z) & -P_0(t)^{-\frac{1}{2}}\dot{P}_0(t)P_0(t)^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}, \ z \in \mathbb{C}.$$

Пусть $x = colon\,(x_1, x_2)$, где x_1, x_2 – векторы размерности n. Тогда имеем

$$x^*\widetilde{Q}(t,z)x = -2\,\mathrm{Re}(x_2^* P_0(t)^{-\frac{1}{2}}\widetilde{P}(t,z)x_1) - x_2^* P_0(t)^{-\frac{1}{2}}\dot{P}_0(t)P_0(t)^{-\frac{1}{2}}x_2.$$

Справедлива следующая оценка:

$$x^*\widetilde{Q}(t,z)x \leqslant 2|x_2|\,\bigl|P_0(t)^{-\frac{1}{2}}\widetilde{P}(t,z)\bigr|\,|x_1| + |x_2|\,\bigl|P_0(t)^{-\frac{1}{2}}\dot{P}_0(t)P_0(t)^{-\frac{1}{2}}\bigr|\,|x_2| \leqslant$$
$$\leqslant \bigl|P_0(t)^{-\frac{1}{2}}\widetilde{P}(t,z)\bigr|\bigl(|x_1|^2 + |x_2|^2\bigr) + \bigl|P_0(t)^{-\frac{1}{2}}\dot{P}_0(t)P_0(t)^{-\frac{1}{2}}\bigr|\bigl(|x_1|^2 + |x_2|^2\bigr),$$

где $t \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{C}$. Учитывая ее, имеем

$$\bigl|\widetilde{Q}(t,z)\bigr| = \sup_{x \neq 0}\frac{\bigl(\widetilde{Q}(t,z)x, x\bigr)^{\frac{1}{2}}}{|x|} \leqslant \sqrt{\bigl|P_0(t)^{-\frac{1}{2}}\widetilde{P}(t,z)\bigr| + \bigl|P_0(t)^{-\frac{1}{2}}\dot{P}_0(t)P_0(t)^{-\frac{1}{2}}\bigr|},$$

где $t \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{C}$. Учитывая это неравенство и обозначения (3.4), оценим величину

$$\max_{|z|\leqslant 1}\left(\frac{1}{\omega}\int_0^\omega q(t,z)\,dt\right)\leqslant \frac{1}{\omega}\int_0^\omega \sqrt{\left|P_0(t)^{-\frac{1}{2}}\right|\sum_{k=1}^m\left|B_k(t)\right|+\left|P_0(t)^{-\frac{1}{2}}\dot P_0(t)P_0(t)^{-\frac{1}{2}}\right|}\,dt.$$

Из неравенства (3.15) следует справедливость неравенства (3.13).

Пример. Рассмотрим периодическую систему дифференциальных уравнений второго порядка с запаздыванием

$$\begin{cases}\dfrac{d^2u_1(t)}{dt^2}+\nu_0\dfrac{du_1(t)}{dt}+\omega_1^2u_1(t)+\varepsilon\varphi(t)u_2(t-\omega)=0,\\ \dfrac{d^2u_2(t)}{dt^2}+\nu_0\dfrac{du_2(t)}{dt}+\omega_2^2u_2(t)+\varepsilon\varphi(t)u_1(t-\omega)=0,\end{cases}\tag{3.19}$$

где ν_0, $\varepsilon>0$, ω_1, ω_2 $(\omega_2>\omega_1>0)$ – постоянные коэффициенты; φ – ω-периодическая кусочно непрерывная функция.

Указанная система имеет вид (3.1) для $n=2$, $m=1$, где

$$B_0(t)=\begin{pmatrix}\omega_1^2 & 0\\ 0 & \omega_2^2\end{pmatrix};\quad B_1(t)=\begin{pmatrix}0 & \varepsilon\varphi(t)\\ \varepsilon\varphi(t) & 0\end{pmatrix},\quad t\in\mathbb{R}.$$

Воспользуемся для нахождения достаточных условий экспоненциальной устойчивости теоремой 4.

а) Запишем условие (3.7). Взяв в качестве C матрицу

$$C=\begin{pmatrix}\omega_1 & 0\\ 0 & \omega_2\end{pmatrix},$$

имеем

$$C-C^{-\frac{1}{2}}\left(B_0(t)-\frac{1}{4}\nu_0^2I_n\right)C^{-\frac{1}{2}}=\begin{pmatrix}\dfrac{\nu_0^2}{4\omega_1} & 0\\ 0 & \dfrac{\nu_0^2}{4\omega_2}\end{pmatrix},\quad t\in\mathbb{R}.$$

Максимальное собственное число последней матрицы равно $\dfrac{1}{4}\nu_0^2\omega_1^{-1}$.
Аналогично находим

$$C^{-\frac{1}{2}}B_1(t)C^{-\frac{1}{2}}=\begin{pmatrix}0 & \dfrac{\varepsilon\varphi(t)}{\sqrt{\omega_1\omega_2}}\\ \dfrac{\varepsilon\varphi(t)}{\sqrt{\omega_1\omega_2}} & 0\end{pmatrix},\quad t\in\mathbb{R}.$$

Максимальное собственное число последней матрицы равно $\dfrac{\varepsilon|\varphi(t)|}{\sqrt{\omega_1\omega_2}}$, $t \in \mathbb{R}$. В результате достаточное условие экспоненциальной устойчивости (3.7) системы (3.19) имеет вид

$$\frac{1}{4}\nu_0^2\omega_1^{-1} + \frac{\varepsilon\omega^{-1}}{\sqrt{\omega_1\omega_2}}\int_0^\omega |\varphi(t)|\,dt < \nu_0.$$

б) Наименьшее собственное значение матрицы $B_0(t)$ равно $\beta_{0min}(t) = \omega_1^2$, а наибольшее $\beta_{0max}(t) = \omega_2^2$, $t \in \mathbb{R}$. В качестве числа α можно взять ω_2. Тогда достаточное условие экспоненциальной устойчивости (4) системы (3.19) примет вид

$$\omega_2 - \frac{4\omega_1^2 - \nu_0^2}{4\omega_2} + \frac{\varepsilon}{\omega_2\omega}\int_0^\omega |\varphi(t)|\,dt < \nu_0.$$

в) Учитывая вид матриц $B_0(t)$ и $B_1(t)$, находим $\beta_0 = \omega_2^2$, $\beta_{0cp}^+ = \omega_2^2$, $\beta_{0cp}^- = \omega_1^2$, $\beta_{1cp}^+ = \dfrac{\varepsilon}{\omega}\displaystyle\int_0^\omega |\varphi(t)|\,dt$. В силу положительности значений β_0, β_{0cp}^+, β_{0cp}^- условия (3.10) и (3.12) не выполняются, а условия (3.9) и (3.11) совпадают. Тогда для экспоненциальной устойчивости системы (3.19) достаточно, чтобы выполнилось условие

$$\frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{\omega_2} + \frac{1}{\omega_2}\left(\frac{1}{4}\nu_0^2 + \frac{\varepsilon}{\omega}\int_0^\omega |\varphi(t)|\,dt\right) < \nu_0.$$

Оно совпадает с условием, полученным в пункте «б».

г) Матрицы $P_0(t)$ определяются формулами

$$P_0(t) = \begin{pmatrix} \omega_1^2 - \dfrac{1}{4}\nu_0^2 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 - \dfrac{1}{4}\nu_0^2 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Условия их определенной положительности имеют вид $\nu_0 < 2\omega_1$. Нормы матриц $P_0^{-\frac{1}{2}}(t)$ и $B_1^{-\frac{1}{2}}(t)$, $t \in \mathbb{R}$, равны соответственно

$$|P_0(t)^{-\frac{1}{2}}| = \frac{1}{\sqrt{\omega_1^2 - \dfrac{1}{4}\nu_0^2}}, \quad |B_1(t)| = \varepsilon|\varphi(t)|, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Тогда условие экспоненциальной устойчивости (3.13) системы (3.19) примет вид

$$\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\omega}\left(\omega_1^2 - \frac{\nu_0^2}{4}\right)^{-\frac{1}{4}}\int_0^\omega \sqrt{|\varphi(t)|}\,dt < \nu_0.$$

Литература

1. Красовский Н. Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959.
2. Ким А. В. О методе функционалов Ляпунова для систем с последействием // Автоматика и телемеханика. 1990. № 2. С. 24–31.
3. Хусаинов Д. Я. Об одном методе построения функционалов Ляпунова–Красовского для линейных систем с запаздывающим аргументом // Украинский матем. журн. 1989. Т. 41, № 3. С. 382–386.
4. Колмановский В. Б., Носов В. Р. Второй метод Ляпунова для систем нейтрального типа // Метод функций Ляпунова и его приложения. Новосибирск, 1984. С. 93–98.
5. Шиманов С. Н. Об устойчивости в критическом случае одного нулевого корня для систем с последействием // Прикладная математика и механика. 1960. Т. 24, № 3. С. 447–457.
6. Шильман С. В. Метод производящих функций в теории динамических систем. М.: Наука, 1978.
7. Малыгина В. В. Некоторые признаки устойчивости функционально-дифференциальных уравнений, разрешенных относительно производной // Изв. вузов. Математика. 1992. № 7. С. 46–53.
8. Смолин Ю. Н. Об одном методе получения экспоненциальной оценки решения уравнения Вольтерра // Там же. 1999. № 4. С. 79–82.
9. Азбелев Н. В., Максимов В. П., Рахматуллина Л. Ф. Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений М.: Наука, 1991.
10. Симонов П. М. Теоремы об устойчивости обобщенных линейных периодических уравнений // Функционально-дифференциальные уравнения. Пермь, 1986.
11. Березанский Л. М. Развитие W-метода Н. В. Азбелева в задаче устойчивости линейных функционально-дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. 1986. Т. 22, № 5. С. 739–750.
12. Долгий Ю. Ф. Устойчивость периодических дифференциально-разностных уравнений // Екатеринбург: УрГУ, 1996.
13. Долгий Ю. Ф. Характеристическое уравнение в задаче устойчивости периодических систем с последействием // Изв. Урал. гос. ун-та. 1998. № 10. (Математика и механика. Вып. 1). С. 34–43.
14. Тонков Е. Л. Показатели Ляпунова и ляпуновская приводимость линейной системы с последействием // Вести. Удмурт. ун-та. 2001. № 3. С. 13–30.
15. Долгий Ю. Ф. Об устойчивости периодической системы дифференциальных уравнений с запаздыванием // Дифференциальные уравнения. 1999. Т. 35, № 10. С. 1330–1336.

16. Шиманов С. Н. К теории линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами и запаздыванием времени // Прикладная математика и механика. 1963. Т. 27, № 3. С. 450–458.

17. Зверкин А. М. К теории дифференциально-разностных уравнений с запаздываниями, соизмеримыми с периодом коэффициентов // Дифференциальные уравнения. 1988. Т. 24, № 9. С. 1481–1492.

18. Гасилов Г. Л. О характеристическом уравнении системы линейных дифференциальных урвнений с периодическими коэффициентами и запаздыванием // Изв. вузов. Математика. 1992. № 4. С. 60–66.

19. Долгий Ю. Ф. Метод функций Ляпунова в задаче устойчивости дифференциальных уравнений с запаздыванием // Наука и транспорт сегодня: проблемы и решения. Екатеринбург: УрГАПС, 1997. Вып. 5. С. 231–237.

20. Репин Ю. М. Об условиях устойчивости систем линейных дифференциальных уравнений при любых запаздываниях // Учен. зап. Урал. гос. ун-та. 1960. Вып. 23. С. 34–41.

21. Кореневский Д. Г. Алгебраические коэффициентные критерии абсолютной асимптотической устойчивости решений систем линейных дифференциальных уравнений с последействием // Математическая физика и нелинейная механика. Киев, 1987. № 7. С. 5–9.

22. Слюсарчук В. Е. Необходимые и достаточные условия абсолютной экспоненциальной устойчивости решений дифференциальных уравнений запаздывающего и нейтрального типов // Докл. АН УССР. Сер. А. 1983. № 12. С. 17–19.

23. Азбелев Н. В., Симонов П. М. Устойчивость решений уравнений с обыкновенными производными. Пермь: Изд-во Перм. ун-та, 2001.

24. Домошницкий А. Н. Неотрицательность отдельных элементов матрицы Коши и экспоненциальная устойчивость системы с запаздыванием // Функционально-дифференциальные уравнения. Пермь, 1991. С. 58–69.

25. Березанский Л. М. Об устойчивости линейных дифференциальных уравнений n-го порядка с последействием // Краевые задачи. Пермь, 1989. С. 12–16.

26. Харгелия О. Р. Об устойчивости автономного дифференциально-разностного уравнения с кратными запаздываниями // Вести. ПГТУ. Математика и прикладная математика. 1996. № 3. С. 74–76.

27. Башкиров А. И., Карнишин С. Г. Об устойчивости уравнения с последействием с периодическими параметрами // Там же. С. 5–8.

28. Соколов В. А. Критерии устойчивости линейного уравнения нейтрального типа // Там же. 1994. № 1. С. 101–105.

29. Лаврентьев Н. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1987.

30. Якубович В. А. Старжинский В. М. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами. М.: Наука, 1972.

31. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. М.: Мир, 1989.

32. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. М.: Наука, 1981.